OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 3 MARTIE 2019

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră numerele reale distincte *a*, *b*, *c*. Arătaţi că:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c\,.$$

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Notăm cu *S* suma din membrul stâng al egalităţii de demonstrat.

Aducând la acelaşi numitor obţinem $S=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$ .... **(1p)**

Cum $a-c=(a-b)+(b-c)$, numărătorul fracţiei *S* se scrie:

$$a^3(b-c)-b^3(a-b)-b^3(b-c)+c^3(a-b)=(a^3-b^3)(b-c)-(b^3-c^3)(a-b)$$ .... **(2p)**

Folosind formula diferenţei de cuburi, obţinem: $S=\frac{(a-b)(b-c)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$ .... **(2p)**

Simplificând, rezultă $S=\frac{a^2+ab-bc-c^2}{a-c}=\frac{(a-c)(a+c)+b(a-c)}{a-c}=a+b+c$ .... **(2p)**

Problema 2. Fie numerele naturale nenule *m* şi *n*, cu $(m,n)=1$. Arătaţi că:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\left\{\frac{3m}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}=\frac{n-1}{2}\,.$$

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ are loc proprietatea $\{x\}+\{-x\}=1$ .... **(2p)**

Într-adevăr, dacă $x\notin\mathbb{Z}$, atunci există $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $n<x<n+1$, deci $-(n+1)<-x<-n$, de unde rezultă $[x]=n$, $[-x]=-n-1$ şi $\{x\}+\{-x\}=x-n+(-x)-(-n-1)=1$.

Deoarece $(m,n)=1$, rezultă $\frac{km}{n}\notin\mathbb{Z}$, pentru orice $k=\overline{1,n-1}$ .... **(1p)**

Notând cu *S* suma din membrul stâng, rezultă:

$$S=\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{(n-2)m}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}$$

$$S=\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-2)m}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\left\{\frac{m}{n}\right\}$$

Adunând membru cu membru cele două relaţii, rezultă

$$2S=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left\{\frac{km}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left\{\frac{km}{n}\right\}+\left\{1-\frac{km}{n}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left\{\frac{km}{n}\right\}+\left\{-\frac{km}{n}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}1=n-1$$ .... **(3p)**

de unde $S=\frac{n-1}{2}$ .... **(1p)**

Notă. Nu se scad puncte dacă afirmaţia $\{x\}+\{-x\}=1$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, este utilizată fără a fi însoţită de demonstraţie.

Problema 3. În triunghiul ABC se notează cu M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Se notează cu a, b, c lungimile laturilor şi cu p semiperimetrul triunghiului. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{p-c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{a}\overrightarrow{AC}$;

b) $a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{BN}+c\overrightarrow{CP}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral;

d) punctul T verifică egalitatea $a\overrightarrow{TM}+b\overrightarrow{TN}+c\overrightarrow{TP}=\vec{0}$ dacă şi numai dacă T este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Soluţie şi barem de corectare

a) Tangentele dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente, deci $AP=AN\overset{not}{=}x$, $BP=BM\overset{not}{=}y$, $CM=CN\overset{not}{=}z$.

Cum $x+y=c$, $y+z=a$ şi $z+x=b$, rezultă $x=\frac{b+c-a}{2}=p-a$, $y=\frac{a+c-b}{2}=p-b$, $z=\frac{a+b-c}{2}=p-c$ ... **(1p)**

Atunci, din $\frac{MB}{MC}=\frac{p-b}{p-c}$, rezultă $\overrightarrow{AM}=\frac{p-c}{p-c+p-b}\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{p-c+p-b}\overrightarrow{AC}= \ =\frac{p-c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{a}\overrightarrow{AC}$ .... **(1p)**

b) Analog obţinem $\overrightarrow{BN}=\frac{p-c}{b}\overrightarrow{BA}+\frac{p-a}{b}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{p-b}{c}\overrightarrow{CA}+\frac{p-a}{c}\overrightarrow{CB}$.

Relaţia $a\overrightarrow{AM}+b\overrightarrow{BN}+c\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ se verifică prin calcul direct .... **(1p)**

c) Ţinând cont de relaţiile de mai sus, rezultă $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\left(\frac{p-c}{a}+\frac{p-a}{c}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{p-b}{a}+\frac{p-a}{b}-1\right)\overrightarrow{AC}$

Obţinem $\frac{p-c}{a}+\frac{p-a}{c}=1$ şi $\frac{p-b}{a}+\frac{p-a}{b}=1$ .... **(1p)**

Prelucrând aceste egalităţi se obţine $a=b=c$ .... **(1p)**

d) Scriind $\overrightarrow{TM}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AM}$ şi analoagele, ţinând cont de punctul ***b)***, egalitatea $a\overrightarrow{TM}+b\overrightarrow{TN}+c\overrightarrow{TP}=\vec{0}$ este echivalentă cu $a\overrightarrow{TA}+b\overrightarrow{TB}+c\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ .... **(1p)**

Cum $\overrightarrow{TA}=\vec{r}_A-\vec{r}_T$ şi analoagele, revine la $\vec{r}_T=\frac{a\vec{r}_A+b\vec{r}_B+c\vec{r}_C}{a+b+c}=\vec{r}_I$, deci T coincide cu I .... **(1p)**

Problema 4. Fie numerele reale $x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=27xyz$. Arătaţi că:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+2yz}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2+2zx}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2+2xy}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gazeta Matematică 2018

Soluţie şi barem de corectare

Deoarece $2yz\leq y^2+z^2$, rezultă $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+2yz}}\geq\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ .... **(2p)**

Însumând cu relaţiile analoage, rezultă $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+2yz}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2+2zx}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2+2xy}}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ .... **(1p)**

Este suficient să arătăm că $\frac{x+y+z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, ceea ce este echivalent cu $x^2+y^2+z^2+8(xy+yz+zx)\geq 3$ ... **(1p)**

Din relaţia $x+y+z=27xyz$ obţinem $27=\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\geq\frac{(1+1+1)^2}{xy+yz+zx}$, de unde $xy+yz+zx\geq\frac{1}{3}$ .... **(2p)**

Atunci $x^2+y^2+z^2+8(xy+yz+zx)\geq 9(xy+yz+zx)\geq 9\cdot\frac{1}{3}=3$ .... **(1p)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 3 MARTIE 2019

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră numărul real $a>0$, $a\neq 1$. Arătaţi că expresia:

$$E=x^{\log_a \frac{y}{z}}\cdot y^{\log_a \frac{z}{x}}\cdot z^{\log_a \frac{x}{y}}$$

este constantă pentru orice valori ale numerelor reale $x, y, z>0$.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Logartimând în baza *a* rezultă: $\log_a E=\log_a \frac{y}{z}\cdot\log_a x+\log_a \frac{z}{x}\cdot\log_a y+\log_a \frac{x}{y}\cdot\log_a z$ .... **(4p)**

Atunci $\log_a E=\left(\log_a y-\log_a z\right)\cdot\log_a x+\left(\log_a z-\log_a x\right)\cdot\log_a y+\left(\log_a x-\log_a y\right)\cdot\log_a z=0$ .... **(2p)**

de unde se obţine $E=1$ .... **(1p)**

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

a) *g* este bijectivă;

b) $f(x)+(f\circ g)(x)-2g(x)=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

c) $(f\circ g)(x)+(f\circ g^{-1})(x)-2x=4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Atribuind lui *x* valoarea $g(x)$ în condiţia c) rezultă $(f\circ g\circ g)(x)+f(x)-2g(x)=4$, $\forall x\in\mathbb{R}$ .... **(2p)**

Ţinând cont de condiţia b) obţinem $(f\circ g\circ g)(x)-(f\circ g)(x)=1$, de unde, folosind substituţia $x\to g^{-1}(x)$, rezultă că $(f\circ g)(x)=f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ .... **(2p)**

Din b) obţinem $f(x)=g(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ .... **(1p)**

Înlocuind în b), rezultă $g(x)+1+g(g(x))+1-2g(x)=3$, de unde $g(g(x))=g(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ .... **(1p)**

Cu substituţia $x\to g^{-1}(x)$ rezultă $g(x)=x+1$, de unde $f(x)=x+2$ .... **(1p)**

Problema 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$8^x\cdot 27^{1-x}+8^{1-x}\cdot 27^x=30.$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Soluţie şi barem de corectare (varianta 1)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8^x\cdot 27^{1-x}+8^{1-x}\cdot 27^x$. Se observă că $f(1-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că dacă ecuaţia admite soluţia $x_1=a$, atunci admite şi soluţia $x_2=1-a$ .... **(2p)**

Se demonstrează că *f* este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ şi crescătoare pe $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ .... **(4p)**

Ca urmare, ecuaţia admite o singură soluţie în intervalul $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ şi o singură soluţie în intervalul $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Observând că $x_1=\frac{1}{3}$ este soluţie, atunci şi $x_2=\frac{2}{3}$ este soluţie, iar acestea sunt singurele soluţii ale ecuaţiei .... **(1p)**

Soluţie şi barem de corectare (varianta 2)

Ecuaţia se rescrie sub forma $27\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^x+8\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^x=30$ .... **(1p)**

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=27\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^x+8\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^x$ este (strict) convexă, fiind o sumă de funcţii convexe .... **(3p)**

Ca urmare, ecuaţia $f(x)=30$ are cel mult două soluţii. Cum $f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=30$, rezultă că ecuaţia din enunţ are exact două soluţii, şi anume $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ .... **(3p)**

Problema 4. Se consideră numerele complexe, nenule şi distincte z_1,z_2,z_3 astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Ştiind că $(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)\neq 0$ şi că

$$\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}+\frac{z_2z_3}{z_2+z_3}+\frac{z_3z_1}{z_3+z_1}=0,$$

arătaţi că $z_1+z_2+z_3=0$.

Gazeta Matematică 2018

Soluţie şi barem de corectare

Deoarece $z_k\cdot\overline{z_k}=1$, obţinem $\overline{z_k}=\frac{1}{z_k}$, $k=1,2,3$. Atunci $\overline{\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}}=\frac{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}=\frac{1}{z_1+z_2}$ şi analoagele .... **(1p)**

Conjugând relaţia din enunţ, obţinem $\frac{1}{z_1+z_2}+\frac{1}{z_2+z_3}+\frac{1}{z_3+z_1}=0$ .... **(1p)**

Aducând la acelaşi numitor, obţinem $z_1^2+z_2^2+z_3^2+3(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0$, de unde

$(z_1+z_2+z_3)^2=-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=-z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=-z_1z_2z_3\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)=-z_1z_2z_3\cdot\overline{z_1+z_2+z_3}$ .... **(2p)**

Trecând la modul, rezultă $|z_1+z_2+z_3|^2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|\cdot\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=|z_1+z_2+z_3|$, deci $|z_1+z_2+z_3|\in\{0,1\}$ .... **(1p)**

Presupunând $|z_1+z_2+z_3|=1$, obţinem $(z_1+z_2+z_3)\left(\overline{z_1+z_2+z_3}\right)=1$, adică $(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=1$, ceea ce conduce, după aducerea la acelaşi numitor, la $(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=0$, contradicţie. Ca urmare, $|z_1+z_2+z_3|=0$, de unde $z_1+z_2+z_3=0$ .... **(2p)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 3 MARTIE 2019

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + A + I_2) = 0$.
Arătaţi că $\det(A - I_2) = 3$.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \det(A - xI_2) = \det A - \operatorname{Tr} A \cdot x + x^2$ .... **(2p)**

Notând cu $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină complexă nereală de ordinul 3 a unităţii, avem $A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2)(A^2 - \varepsilon^2 I_2)$,

deci $\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2)\det(A - \varepsilon^2 I_2) = f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2)$ .... **(2p)**

Obţinem $f(\varepsilon) = 0$, de unde $\det A - \operatorname{Tr} A \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

Ţinând cont că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, rezultă $\det A - 1 - (\operatorname{Tr} A + 1) \cdot \varepsilon = 0$, deci $\det A = 1$ şi $\operatorname{Tr} A = -1$ .... **(2p)**

Ca umare, $\det(A - I_2) = f(1) = 1 - \operatorname{Tr} A + \det A = 3$ .... **(1p)**

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ definite astfel:

$$x_1 = a,\ y_1 = b \text{ şi } x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5},\ y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5},\ n \ge 1.$$

a) Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită

b) Determinaţi limita comună a celor două şiruri.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

a) Prin inducţie se arată că $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător, $(y_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător şi $a < x_n < y_n < b$ .... **(2p)**

Aşadar cele două şiruri sunt convergente. Trecând la limită într-una din relaţiile date se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ .... **(1p)**

b) Scriind $y_n = \dfrac{5x_{n+1} - 2x_n}{3}$, înlocuind în cealaltă recurenţă, şi efectuând calculele obţinem $5x_{n+2} - 4x_{n+1} - x_n = 0$ .... **(2p)**

Ecuaţia caracteristică are soluţiile $r_1 = 1$ şi $r_2 = -\dfrac{1}{5}$, deci $x_n = \alpha + \beta \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .... **(1p)**

Din $x_1 = a$ şi $x_2 = \dfrac{2a + 3b}{5}$ se obţine $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, $\beta = \dfrac{5(b-a)}{2}$. Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{a+b}{2}$ .... **(1p)**

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$, $n \ge 1$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

a) Întrucât $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n} > a_n$, $\forall n \ge 1$, şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este strict crescător, deci are limită $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda > a_1$ .... **(2p)**

Presupunând $\lambda \in \mathbb{R}$, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă s-ar obţine $\lambda = 0$, absurd, deci $\lambda = \infty$ .... **(2p)**

b) Avem $\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\frac{a_n}{a_n+\sqrt{a_n^2+a_n}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a_n}}}\to\frac{1}{2}$ .... **(2p)**

de unde, cu lema Cesàro-Stolz, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$ .... **(1p)**

Problema 4. a) Arătaţi că pentru orice matrice $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc identitatea:

$$AB+BA=(\mathrm{Tr}\,A)\cdot B+(\mathrm{Tr}\,B)\cdot A-\left(\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)\right)\cdot I_2 .$$

b) Se consideră matricele nenule $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB+BA=O_2$.

Arătaţi că $\mathrm{Tr}\,A=\mathrm{Tr}\,B=0$ sau $\det A=\det B=0$.

Gazeta Matematică 2018

Soluţie şi barem de corectare

a) Calcul direct (sau cu diverse alte instrumente) .... **(3p)**

b) Se ştie că $f(x)\overset{not}{=}\det(A+xB)=\det A+\left(\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)\right)\cdot x+\det B\cdot x^2$

Din $AB+BA=O_2$ rezultă relaţiile:

- $(A+B)^2=(A-B)^2$, de unde $\left(f(1)\right)^2=\left(f(-1)\right)^2$, care conduce la $\left(\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)\right)\cdot\left(\det A+\det B\right)=0$ ..... **(1p)**
- $(A+iB)^2=(A-iB)^2$, de unde $\left(f(i)\right)^2=\left(f(-i)\right)^2$, care conduce la $\left(\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)\right)\cdot\left(\det A-\det B\right)=0$ ..... **(1p)**

Dacă $\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)=0$, întrucât $AB+BA=O_2$, avem $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=\mathrm{Tr}(-AB)=-\mathrm{Tr}(AB)$, deci $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=0$, adică $\mathrm{Tr}\,A=0$ sau $\mathrm{Tr}\,B=0$. Relaţia de la a) ne arată că $\mathrm{Tr}\,A=\mathrm{Tr}\,B=0$ .... **(1p)**

Dacă $\mathrm{Tr}\,A\cdot\mathrm{Tr}\,B-\mathrm{Tr}(AB)\neq 0$, atunci $\det A+\det B=0$ şi $\det A-\det B=0$, deci $\det A=\det B=0$ .... **(1p)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 3 MARTIE 2019

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e. Arătați că dacă există o funcție $f:G\to G$ cu proprietățile:

(i) $f^2(x)=e$ dacă şi numai dacă $x=e$;

(ii) $f(x^{-1})=\left(f(x)\right)^{-1}$ pentru orice $x\in G$;

atunci funcția $g:G\to G$, $g(x)=x^2$ este injectivă.

Prof. Eduard Buzdugan, Slatina

Soluție şi barem de corectare

Fie $x,y\in G$ astfel încât $g(x)=g(y)$. Atunci $x^2=y^2$, de unde $xy^{-1}=x^{-1}y$ .... **(2p)**

Folosind comutativitatea şi condiția (ii) avem $f\left(x^{-1}y\right)=f\left(xy^{-1}\right)=f\left((yx^{-1})^{-1}\right)=f\left((x^{-1}y)^{-1}\right)=\left(f(x^{-1}y)\right)^{-1}$ .... **(3p)**

Din $f\left(x^{-1}y\right)=\left(f(x^{-1}y)\right)^{-1}$ rezultă $\left(f(x^{-1}y)\right)^2=e$, iar din (i) rezultă $x^{-1}y=e$, de unde $x=y$ .... **(2p)**

Problema 2. Determinați primitivele funcției $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x$.

[***]

Soluție şi barem de corectare

Folosind formule cunoscute, avem $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2$ .... **(2p)**

Atunci $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)e^x dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)e^x dx+\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}e^x dx=\int\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' e^x dx+\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}e^x dx$ .... **(3p)**

Integrând prin părți rezultă $\int f(x)dx=\operatorname{tg}\frac{x}{2}e^x+C$ .... **(2p)**

Problema 3. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2\ln x$.

a) Arătați că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ ecuația $f(t)=x$ are o unică soluție $t=\varphi(x)$.

b) Demonstrați că funcția $\varphi:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $x\to\varphi(x)$ este derivabilă şi calculați $\int_1^{2+e^2}\frac{dx}{1+\varphi^2(x)}$.

Prof. Marius Perianu, Slatina

Soluție şi barem de corectare

a) $f'(x)=\frac{2(x^2+1)}{x}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$; *f* este strict crescătoare, deci şi injectivă .... **(1p)**

f are proprietatea lui Darboux (fiind continuă) şi $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, deci $\operatorname{Im}f=\mathbb{R}$, adică *f* este bijectivă.

Ca urmare, ecuația $f(t)=x$ are o unică soluție .... **(1p)**

b) φ este inversa funcției *f*; cum *f* este derivabilă şi $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, rezultă că φ este derivabilă.............. **(1p)**

În plus, $\varphi'(x)=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(\varphi(x))}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)}$ .... **(2p)**

Rezultă $\frac{1}{1+\varphi^2(x)}=2\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, deci $\int_1^{2+e^2}\frac{dx}{1+\varphi^2(x)}=2\int_1^{2+e^2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=2\ln\left|\varphi(x)\right|\Big|_1^{2+e^2}=2\ln\frac{\varphi(2+e^2)}{\varphi(1)}$ .... **(1p)**

Deoarece $f(1)=1$ şi $f(e)=2+e^2$, avem $\varphi(1)=1$ şi $\varphi(2+e^2)=e$, deci $\int_1^{2+e^2}\frac{dx}{1+\varphi^2(x)}=2$ .... **(1p)**

Problema 4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e, pentru care există un număr natural fixat $n \geq 3$ astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile:

a) $x^n y^n = y^n x^n$, pentru orice $x, y \in G$;

b) $z^{n+1} = e$ sau $z^{n-1} = e$, pentru orice $z \in G$.

Arătaţi că G este grup abelian.

[***]

Soluţie şi barem de corectare

Fie $x, y \in G$ alese arbitrar. Conform condiţiei b), sunt posibile trei cazuri:

Cazul 1: $x^{n+1} = y^{n+1} = e$. Obţinem $x^n = x^{-1}$ şi $y^n = y^{-1}$, iar din condiţia a) rezultă $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, relaţie echivalentă cu $xy = yx$ .... **(2p)**

Cazul 2: $x^{n-1} = y^{n-1} = e$. Obţinem $x^n = x$ şi $y^n = y$, iar din condiţia a) rezultă $xy = yx$ .... **(2p)**

Cazul 3: $x^{n+1} = y^{n-1} = e$ (sau cazul simetric). Obţinem $x^n = x^{-1}$ şi $y^n = y$, iar din condiţia a) rezultă $x^{-1}y = yx^{-1}$, relaţie echivalentă cu $xy = yx$ .... **(3p)**