<u>RESURSĂ EDUCAŢIONALĂ DESCHISĂ</u>

Denumire: Matematica în concursurile școlare
Autor: prof. Ioniță Adriana
Unitatea de învăţământ: Colegiul Național ”Radu Greceanu” Slatina
Disciplina: Matematică
Clasa: VIII
Scopul materialului propus: pentru elev (de utilizat de către elev)

Matematica în Concursurile Școlare

Clasa a VIII a

1.Determinați numerele naturale n,pentru care $\sqrt{4n^2+31n+1}$ este număr rațional.

Gazeta Matematică 12/2009

Soluție

Obsevăm că $4n^2+31n+1<4n^2+32n+64$=$(2n+8)^2$ căutăm *n* astfel încât

$4n^2+31n+1>(2n+7)^2$ ⇔ n>16.Așadar,pentru n≥16,avem

$2n+7<\sqrt{4n^2+31n+1}<2n+8$ și deci $\sqrt{4n^2+31n+1}$ nu aparține lui **Q**.Căutăm valorile pentru $\mathrm{n}\in\{0,1,2,\ldots\ldots15\}$.Verificare prin calcul .n∈ $\{0,1,5\}$

2.Demonstrați că: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}>6$

Soluție: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})+(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}})$

Arătăm că expresia din fiecare paranteză este mai mare decât 2.Astfel, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>2\ (A)$, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>2$ pentru că $\sqrt{7}+1>2\sqrt{2}$, <=> 8+2$\sqrt{7}>8(A)$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}>2$ <=> $\frac{3+2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}>2$ <=> $3+2\sqrt{7}>4\sqrt{3}$ 9+28+12$\sqrt{7}>48$ <=> 12$\sqrt{7}>11$ (A). Prin adunare se obține inegalitatea cerută.

3.Determinați numerele x,y,z∈ $[0,\infty)$, știind că verifică simultan relațiile:x+y+z≤ $t, x^2+y^2+z^2\geq t$ și

$x^3+y^3+z^3\leq t$, (Olimpiada Națională 2011)

Soluție: Adunând membru cu membru inegalitățile, x+y+z≤ t, $-2x^2-2y^2-2z^2\leq -2t$ și $x^3+y^3+z^3\leq t$,obținem că x$(1-x)^2+y(1-y)^2$+$z(1-z)^2\leq 0.$Cum x,y,z∈ $[0,\infty)$, rezultă că x,y,z∈ $\{0,1\}$.Dacă x=y=z=0 rezultă t=0.Dacă exact două dintre numerele x ,y,z sunt nule,atunci 1≤ t

și $1\geq t$,prin urmare t=1,$(\mathrm{x,y,z})\in\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Dacă exact unul dintre numerele x ,y,z este nul,atunci 2≤ t și $2\geq t$,deci t=2, $(\mathrm{x,y,z})\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.Dacă x=y=z=1,deducem că t=3.

4.Fie a,b,c numere întregi nenule,distincte două câte două.

a)Demonstrați că $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq 9$

b)Dacă,în plus,ab+ac+bc+3=abc>0, arătați că $(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)\geq 6$

(Olimpiada Națională 2011)

Soluție: a)Măcar unul dintre numerele a,b,c are modulul cel puțin 2,deci $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq 1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 4=9$

b)Inegalitatea de demonstrat revine succesiv la ab+ac+bc-2$(a+b+c)$+3≥6 <=> ab+ac+bc-3≥2$(a+b+c)$ <=> $(\mathrm{ab}+\mathrm{ac}+\mathrm{bc}-3)(\mathrm{ab}+\mathrm{ac}+\mathrm{bc}+3)$ ≥2abc$(a+b+c)$ <=> $(\mathrm{ab}+\mathrm{ac}+\mathrm{bc})^2$-9≥2abc$(a+b+c)$ <=> $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq 9$ adică tocmai relația demonstrată la punctul a)

O altă metodă de rezolvare se bazează pe determinarea numerelor a,b,c care satisfac relatia ab+ac+bc+3=abc> 0.Obținem că doar$\{a,b,c\}=\{-1,-2,1\}$ și$\{a,b,c\}=\{2,3,9\}$ verifică relația și,pentru ambele situații,inegalitatea cerută se verifică.

5.Determinați a∈**R** cu proprietatea că $(a^2+2a-3)^3$+$(a^2-2a-15)^3$=8$(a^2-9)^3$

Concursul „Alexandru Myller"

Soluție:Fie x=a^2+2a-3,y=$a^2-2a-15$,z=-2a^2+18.Atunci relația din enunț se scrie $x^3+y^3+z^3=0$.

Observăm că x+y+z=0 și folosind $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

obținem 3xyz=0, de unde x=0 sau y=0 sau z=0. Dacă x=0 atunci a^2+2a-3=0 <=> $(\mathrm{a}+1)^2$=4 <=>a+1=$\pm$2 ⬄a∈ $\{-3,1\}$. Dacă y=0 , atunci $a^2-2a-15$=0 ⬄ $(\mathrm{a}-1)^2$=16 ⬄a-1=$\pm$4 ⬄

a∈ $\{-3,5\}$.Dacă z=0 atunci $a^2-9=0$ ⬄ a∈ $\{-3,3\}$.Așadar a∈ $\{-3,1,3,5\}$.Altfel,cu notatiile de mai sus și observația că z=−x−y,relația din enunț devine $x^3+y^3=(x+y)^3$ adică 0=3x^3y+3xy^3adică xy(x+y)=0,etc.

6.a)Determinați numerele întregi a și b astfel încât $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}$=a+b$\sqrt{2}$

b)Arătați că $\left(3-2\sqrt{2}\right)^5$ <0,001 (Concursul „Laurențiu Panaitopol")

Soluție : a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}$=$\left(\sqrt{2}-1\right)^2$=3-2$\sqrt{2}$, deci a=3 și b=−2

b) Înmulțind $\left(3-2\sqrt{2}\right)^5$ <0,001 cu $\left(3+2\sqrt{2}\right)^5>0$ inegalitatea devine: $1<\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^5}{1000}$ sau

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^5$ > 1000 adevărat,pentru că $\left(3+2\sqrt{2}\right)^5$ = $\left(3+2\sqrt{2}\right)^4\left(3+2\sqrt{2}\right)>$ 1000

7.Fie x un număr irațional.Se știe că 36 este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că numărul x^{36} este rațional.Determinați numărul de elemente raționale din mulțimea

A=$\left\{x^{a\cdot b}, a+b=36, a,b\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\right\}$ Concursul „Alexandru Myller"

Soluție: Conform teoremei împărțirii cu rest,ab=36k+r,cu k,r ∈ $\mathbf{N}$, r < 36

$x^{a\cdot b}=(x^{36})^k\ x^r$ este rațional dacă și numai dacă x^r este rațional,ceea ce se întamplă numai dacă r=0. Deci ab=36k, cu k ∈ $\boldsymbol{N}^*$ ($a,b\in\mathbf{N}/\{0\}$)adică a(36-a)=36k,sau $a^2=36(a-k.)$ Deci 6Ia adică

a∈ $\{6,12,18,24,30\}$. Obținem $x^{a\cdot b}$ ∈ $\{x^{6\cdot 30},x^{12\cdot 24},x^{18\cdot 18}\}$,cele 3 elemente ale mulțimii fiind distincte deoarece x≠ 0 și x≠ 1.

8. Fie k,n$\in \mathbf{N}$,k$\geq$ 2,n $\geq$ 1 și x $>$ 0.Arătați că au loc inegalitățile:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}$$

Concursul „Gheorghe Lazăr”

Soluție: $\sqrt[k]{x+i}$=$\sqrt[k]{1\cdot 1\cdot 1 \ldots 1(x+i)} \leq \frac{1+1+1\ldots+1+(x+i)}{k}$=$\frac{k-1+x+i}{k}$, $(*)$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} \geq \sum_{i=0}^{n} k = k(n+1)$$

Inegalitatea este strictă pentru că nu putem avea simultan egalitate în $(*)$ pentru toate valorile lui i.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} \leq \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{k} = \frac{n+1}{k}$$

9.Fie x,y,z,t$>$ 0.Demonstrați că : $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+t}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} > 2$

Gazeta Matematică nr 11/2010

Soluție:Folosind inegalitatea dintre media geometrică și cea armonică avem $\sqrt{a}$=$\sqrt{1\cdot a} \geq \frac{2}{1+\frac{1}{a}}$=$\frac{2a}{a+1}$, $\forall a > 0$

Atunci $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+t}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{\frac{2x}{y+z+t}}{\frac{x}{y+z+t}+1}+\frac{\frac{2y}{x+z+t}}{\frac{y}{x+z+t}+1}\frac{\frac{2z}{y+x+t}}{\frac{z}{y+x+t}+1}\frac{\frac{2t}{y+z+x}}{\frac{t}{y+z+x}+1}$=$\frac{2x+2y+2z+2t}{x+y+z+t}$=2

Demonstrăm că inegalitatea este strictă.Pentru a avea egalitate ar trebui să avem egalitate în inegalitatea mediilor,adica $\frac{x}{y+z+t}$=1 și analoagele,ceea ce nu se poate simultan,deci inegalitatea este strictă.

Bibliografie   Gazeta Matematică 2009-2012

Selecție de probleme prezentate în cadrul activității grupei de elevi , clasa a VIII a ,înscriși la Centrul Județean de Excelență.

Prof.Adriana Ioniță